# DEĞİŞKEN YARIÇAPLI ELASTİK TÜPLERDE NONLİNEER DALGA YAYILIMI VE SOLİTONLAR

**İlkay Bakırtaş[1*], Hilmi Demiray[2]**

1 İTÜ Fen Edebiyat Fakültesi,Matematik Bölümü, 34469, Maslak, İstanbul
2 Işık Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi,Matematik Bölümü, Şile, İstanbul

## ABSTRACT

In the present work, treating the arterial tree as a tapered, thin walled, long and circularly conical prestressed elastic tube and using the reductive perturbation method, the propagation of weakly nonlinear waves in such a fluid-filled elastic tube is studied. By considering the blood as an incompressible inviscid fluid, the evolution equation is obtained as the Korteweg-de Vries equation with a variable coefficient. It is shown that this type of equations admit a solitary wave type of solution with variable wave speed. It is observed that the wave speed increases with distance for descending tube while it decreases for ascending tube.

## ÖZET

Bu çalışmada, büyük damarlar, değişken yarıçaplı, ince, uzun, dairesel koni, ön gerilmeli, elastik tüp olarak kabul edilerek, böyle bir tüp içerisinde zayıf nonlineer dalgaların yayılımı indirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Kan sıkışmaz ve viskoz olmayan bir akışkan olarak kabul edilerek, evolüsyon denklemi olarak değişken katsayılı Korteweg-de Vries denklemi elde edilmiştir. Bu evolüsyon denkleminin yalnız dalga (solitary wave) tipi bir çözümü kabul ettiği gösterilmiş ve ilerleyen dalganın hızı belirlenmiştir. İlerleyen dalga hızının yarıçapı genişleyen tüpler için, orijinden uzaklaştıkça azaldığı; buna karşılık yarıçapı daralan tüpler için orijinden uzaklaştıkça arttığı gözlenmiştir.

## 1. PROBLEMİN MODELLENMESİ

### 1.1. Giriş

Bu çalışmada, içi sıkışmaz ve viskoz olmayan bir akışkan ile dolu, öngerilmeli, değişken yarıçaplı elastik tüplerde zayıf nonlineer dalga yayılımı problemi, uzun dalga yaklaşımı altında, indirgeyici pertürbasyon yöntemi (Jeffrey ve Kawahara [1]) kullanarak incelenmiş ve yönetici denklem olarak değişken katsayılı Korteweg-de Vries denklemi elde edilmiştir. Bu tip denklemlerin değişken dalga hızına sahip yalnız (soliter) dalga çözümleri olduğu gösterilmiş, yarıçapı artan ve azalan tüplerde, dalga hızının eksenel koordinatla değişimi irdelenmiştir.

## 1.2. Temel Denklemler

### 1.2.1 Tüp Denklemleri

Bu bölümde, içi sıkışmaz ve viskoz olmayan bir akışkanla dolu, değişken yarıçaplı ince elastik tüpte dalga yayılımı probleminin modellenmesinde kullanılacak olan alan denklemleri elde edilecektir. Bu amaçla, uç yarıçapı $R_0$ ve genişleme veya daralmayı temsil eden açı $\Phi$ olan dairesel silindirik bir tüp göz önüne alalım. Bu durumda incelenmekte olan noktanın konum vektörü aşağıdaki biçimde ifade edilebilir

$$\mathbf{R} = (R_0 + \Phi Z)\mathbf{e_r} + Z\mathbf{e_z} \ . \tag{1.1}$$

Burada $\mathbf{e_r}, \mathbf{e_\theta}$ ve $\mathbf{e_z}$ silindirik koordinatlardaki birim baz vektörlerini göstermektedir. Z ise maddesel noktanın şekil değiştirmeden önceki eksenel koordinatını temsil etmektedir. Şekil değiştirmeden önceki elemanın meridiyen ve çevresel doğrultulardaki kenar uzunlukları aşağıdaki biçimde tanımlanmışlardır

$$dS_Z = (1+\Phi^2)^{1/2} dZ \, , dS_\Theta = (R_0 + \Phi Z) d\Theta \, . \tag{1.2}$$

Çalışmada, tüpün başlangıçta bir $P_0(Z)$ iç basıncına maruz kaldığı kabul edilecektir. Statik şekil değiştirmeden sonra tüpün yarıçapı aşağıdaki biçimde ifade edilebilir

$$\mathbf{r_0} = (r_0 + \phi z^*)\mathbf{e_r} + z^*\mathbf{e_z} \ , \ z^* = \lambda_z Z \ . \tag{1.3}$$

Burada, $z^*$ statik şekil değiştirmeden sonraki eksenel koordinatı, $\lambda_z$ eksenel doğrultudaki germeyi, $r_0$ deformasyondan sonraki uç yarıçapını, $\phi$ statik şekil değiştirmeden sonraki genişleme(daralma) açısını temsil etmektedir. Şekil değiştirmeden sonraki elemanın meridiyen ve çevresel doğrultulardaki kenar uzunlukları aşağıdaki biçimde tanımlanmışlardır

$$ds_z^0 = (1+\phi^2)^{1/2} dz^* \ , \ ds_\theta^0 = (r_0 + \phi z^*) d\theta \ . \tag{1.4}$$

Meridiyen ve çevresel doğrultulardaki germeler aşağıdaki biçimde tanımlanabilir

$$\lambda_1^0 = \frac{ds_z^0}{dS_Z} = \lambda_z \frac{(1+\phi^2)^{1/2}}{(1+\Phi^2)^{1/2}} \ , \ \lambda_2^0 = \frac{ds_\theta^0}{dS_\Theta} = \lambda_z \frac{(r_0 + \phi z^*)}{(\lambda_z R_0 + \Phi z^*)} \tag{1.5}$$

Şekil değiştirmeden önceki tüp kalınlığının $H$, şekil değiştirmeden sonraki tüp kalınlığının ise $h$ olduğunu varsayalım. Tüp malzemesinin sıkışmazlık koşulu göz önünde bulundurulursa aşağıdaki bağıntı elde edilir

$$h = \frac{H(1+\Phi^2)^{1/2}(R_0\lambda_z + \Phi z^*)}{(1+\phi^2)^{1/2}(r_0 + \phi z^*)} \quad . \tag{1.6}$$

(1.6) ifadesinden de görüldüğü gibi , kalınlık eksenel koordinatla değişmektedir. Kalınlığın orijindeki ve sonsuzdaki değerleri sırasıyla aşağıdaki biçimde verilebilir

$$h_0 = \frac{H(1+\Phi^2)^{1/2}}{\lambda_\theta \lambda_z (1+\phi^2)^{1/2}} = \frac{H}{\lambda_\theta \lambda_1^0} \;,\; h_\infty = \frac{H(1+\Phi^2)^{1/2}\Phi}{\lambda_z^2 (1+\phi^2)^{1/2}\phi} = \frac{H}{\lambda_1^0 \lambda_2^0(\infty)} \tag{1.7}$$

Burada $\lambda_2^0(\infty)$ , $\lambda_2^0$ 'nin sonsuzdaki değerini ve $\lambda_\theta = r_0 / R_0$ radyal doğrultudaki eksenel germesinin orijindeki değerini ifade etmektedir. Eğer statik şekil değiştirme öncesinde ve sonrasında yarıçapın değişimini ifade eden açılar arasında $\phi = \Phi\lambda_\theta / \lambda_z$ biçiminde bir ilişki varsa, tüp ekseni boyunca kalınlık değişmez, sabit kalır ve $h_0 = H/(\lambda_\theta \lambda_1^0)$ olarak ifade edilebilir.

*Bu statik şekil değiştirmenin üzerine, radyal doğrultuda küçük ve zaman bağlı $u^*(z^*,t^*)$ sonlu, dinamik yer değiştirmesinin süperpoze edildiğini varsayalım. Eksenel yöndeki yataklama kuvvetlerini göz önünde bulundurarak, eksenel yöndeki yer değiştirme ihmal edilecektir. Bu durumda incelenmekte olan noktanın konum vektörü aşağıdaki gibi ifade edilebilir*

$$\mathbf{r} = (r_0 + \phi z^* + u^*)\mathbf{e_r} + z^*\mathbf{e_z} \, . \tag{1.8}$$

Şekil değiştirmiş elemanın kenar uzunlukları ise aşağıdaki biçimde tanımlanmışlardır

$$ds_z = \left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)^2\right]^{1/2} dz^* ,\; ds_\theta = (r_0 + \phi z^* + u^*)d\theta \tag{1.9}$$

Son germeler aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$\lambda_1 = \lambda_z \left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)^2\right]^{1/2} / (1+\Phi^2)^{1/2} , \lambda_2 = \lambda_z (r_0 + \phi z^* + u^*)/(\lambda_z R + \Phi z^*) \; . \tag{1.10}$$

O halde şekil değiştirmiş meridiyene teğet birim **t** vektörü ve şekil değiştirmiş mambranın birim dış normali **n** aşağıdaki gibi verilebilir

$$\mathbf{t} = \frac{\left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)\mathbf{e_r} + \mathbf{e_z}}{\left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)^2\right]^{1/2}} , \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{e_r} - \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)\mathbf{e_z}}{\left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)^2\right]^{1/2}} \; . \tag{1.11}$$

Tüp malzemesinin sıkışmazlığı kullanılarak, tüpün son kalınlığı şu biçimde verilebilir

$$h' = \frac{H(1+\Phi^2)^{1/2}(\lambda_z R_0 + \Phi z^*)}{\lambda_z^2\left[1+\left(\phi+\dfrac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)^2\right]^{1/2}(r_0+\phi z^*+u^*)} . \tag{1.12}$$

$T_1$ ve $T_2$ sırasıyla, meridiyen yayı ve çevresel yay boyunca etkiyen mambran kuvvetlerini göstersin. Bu durumda $z^* = sbt., z^* + dz^* = sbt.$ ve $\theta = sbt., \theta + d\theta = sbt.$ düzlemleri arasında kalan tüp elemanının radyal doğrultudaki hareket denklemi aşağıdaki biçimde ifade edilebilir

$$-T_2\left[1+\left(\phi+\frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)^2\right]^{1/2} + \frac{\partial}{\partial z^*}\left\{\frac{(r_0+\phi z^*+u^*)(\phi+\partial u^*/\partial z^*)}{\left[1+(\phi+\partial u^*/\partial z^*)^2\right]^{1/2}}T_1\right\} + P^*(r_0+\phi z^*+u^*)$$
$$= \frac{\rho_0 H}{\lambda_z^2}(1+\Phi^2)^{1/2}(\lambda_z R_0+\Phi z^*)\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}} . \tag{1.13}$$

Burada $\rho_0$ mambranın kütle yoğunluğunu ve $P^*$ ise akışkan basıncını ifade etmektedir.

$\mu\Sigma$ mambran malzemesine ait şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu fonksiyonunu göstersin. Bu durumda mambran kuvvetleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$T_1 = \frac{\mu H}{\lambda_2}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} , \quad T_2 = \frac{\mu H}{\lambda_1}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} . \tag{1.14}$$

(1.14) ifadesini, (1.13) ile verilen hareket denkleminde kullanırsak, radyal doğrultudaki hareket denklemi aşağıdaki hali alır

$$-\frac{\mu}{\lambda_z}H(1+\Phi^2)^{1/2}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} + \frac{\mu}{\lambda_z}H\frac{\partial}{\partial z^*}\left\{\frac{(\lambda_z R_0+\Phi z^*)(\phi+\partial u^*/\partial z^*)}{\left[1+(\phi+\partial u^*/\partial z^*)^2\right]^{1/2}}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1}\right\} + P^*(r_0+\phi z^*+u^*)$$
$$= \frac{\rho_0 H}{\lambda_z^2}(1+\Phi^2)^{1/2}(\lambda_z R_0+\Phi z^*)\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}} . \tag{1.15}$$

### 1.2.2 Akışkan Denklemleri

Newtonyen ve viskoz olmayan bir akışkana ait denklemler aşağıdaki gibi verilebilir

$$\frac{\partial A}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial z^*}(Av^*) = 0 , \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\rho_f}\frac{\partial P^*}{\partial z^*} = 0 . \tag{1.17}$$

Burada $v^*$ hızın ortalama anlamda eksenel doğrultudaki hız bileşeni, $A(z^*, t^*)$ tüpün dik kesit alanı, $\rho_f$ akışkanın kütle yoğunluğunu göstermektedir. Dik kesit alanı ile en son yarıçap fonksiyonu arasındaki ilişkinin $A = \pi(r_0 + \phi z^* + u^*)^2$ olduğu göz önünde bulundurulursa, kütle korunum denklemi aşağıdaki formu alır

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + (\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})v^* + \frac{1}{2}(r_0 + \phi z^* + u^*)\frac{\partial v^*}{\partial z^*} = 0 . \tag{1.18}$$

Bu aşamada, aşağıdaki boyutsuz büyüklükleri tanımlamak uygun olacaktır

$$t^* = \frac{R_0}{c_0}t\,,\ z^* = R_0 z\,,\ u^* = R_0 u\,,\ v^* = c_0 v\,,\ m = \frac{\rho_0 h}{\rho_f R_0}\,,\ r_0 = \lambda_\theta R_0\,, P^* = \rho_f c_0^2 p \tag{1.19}$$

(1.19) ifadeleri (1.15), (1.17) ve (1.18) eşitliklerinde kullanılırsa aşağıdaki boyutsuz denklemler elde edilir

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\phi + \frac{\partial u}{\partial z})v + \frac{1}{2}(\lambda_\theta + \phi z + u)\frac{\partial v}{\partial z} = 0\ , \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} = 0\ , \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} p = {} & \frac{m}{\lambda_z^2}(1+\Phi^2)^{1/2}\frac{(\lambda_z + \Phi z)}{(\lambda_\theta + \phi z + u)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(1+\Phi^2)^{1/2}}{\lambda_z(\lambda_\theta + \phi z + u)}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} \\ & - \frac{1}{\lambda_z(\lambda_\theta + \phi z + u)}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{(\phi + \partial u/\partial z)(\lambda_z + \Phi z)}{\left[1 + (\phi + \partial u^*/\partial z^*)^2\right]^{1/2}}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1}\right\} \end{aligned} \tag{1.22}$$

Bu denklemler $u, v$ ve $p$ bilinmeyenlerini belirlemek için yeterlidir.

## 2. UZUN DALGA YAKLAŞIMI

Bu bölümde, boyutsuz halde yönetici denklemleri (1.20)-(1.22) ile verilmiş olan, içi akışkan ile dolu, lineer olmayan, ince ve yarıçapı değişken tüplerde küçük fakat sonlu genlikli dalgaların yayılımı incelenecektir. Bunun için, uzun dalga yaklaşımında, indirgeyici pertürbasyon yöntemi probleme uyarlanacaktır (Jeffrey and Kawahara [1]).

Fiziksel koşullar dolayısıyla, problemi bir sınır değer problemi olarak ele almak uygundur. Bu tür problemlerde, verilen frekansa karşılık, dalga sayısı, dispersiyon bağıntısından elde edilir. Uzun dalga yaklaşımını temsil etmek üzere, aşağıda verilen yapıda bir koordinat dönüşümünü kullanmak uygundur

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(z - gt),\ \ \tau = \varepsilon^{3/2}z\ , \tag{1.23}$$

burada $\varepsilon$ nonlineeritenin ve dispersiyonun mertebesini karakterize eden küçük bir parametre, $g$ ise bir ölçek parametresidir. Burada, alan değişkenlerinin, $(\xi, \tau)$ yavaş değişkenlerinin ve

$\varepsilon$ parametresinin bir fonksiyonu olduğu kabul edilecektir. Tüpün yarıçapının değişimini hesaba katmak için, (1.23) ile ifade edilen koordinat dönüşümü gözönünde bulundurulursa, yarıçap değişimini karakterize eden $\Phi$ ve $\phi$ açılarını $\varepsilon^{5/2}$ mertebesinde kabul etmek gerekmektedir. Bu durumda söz konusu açılar aşağıdaki biçimde ifade edilebilirler

$$\Phi = A\varepsilon^{5/2} \ , \ \phi = a\varepsilon^{5/2} \tag{1.24}$$

burada $A$ ve $a$ sırasıyla, şekil değiştirmeden önceki ve sonraki yarıçap değişim açılarını karakterize eden parametrelerdir.

Ayrıca, alan değişkenlerinin aşağıdaki formda asimptotik seriye açılabileceği varsayılacaktır

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots, \qquad v = \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \ldots, \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \ldots \ . \tag{1.25}$$

Burada $u_1,...p_2$ yavaş değişkenler olan $(\xi,\tau)$ 'nun fonksiyonudurlar. (1.24) ve (1.25) yapılarını (1.20), (1.21) denklemlerinde kullanır ve elde edilen eşitliklerde $\varepsilon$ 'nun benzer kuvvetleri sıfıra eşitlenecek olursa, aşağıdaki denklem seti elde edilir.

*$O(\varepsilon)$ mertebeden denklemler:*

$$-g\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\lambda_\theta}{2}\frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0 \ , \ -g\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1}{\partial \xi} = 0 \, . \tag{1.26}$$

*$O(\varepsilon^2)$ mertebeden denklemler:*

$$-g\frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\lambda_\theta}{2}\frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{\lambda_\theta}{2}\frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \frac{1}{2}u_1\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2}a\tau\frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0, \ -g\frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1}{\partial \tau} = 0 \, . \tag{1.27}$$

Bu denklemlerde, $p_1$ ve $p_2$ fonksiyonları henüz bilinmemektedir. Ayrıca, (1.23) ile ifade edilen koordinat dönüşümünün altında, yarıçap değişimini karakterize eden $\Phi Z$ ve $\phi z$ terimlerinin, sırasıyla $(A\tau)\varepsilon$ ve $(a\tau)\varepsilon$ terimlerine dönüşmekte olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu durumda aşağıdaki açılımlar geçerlidir

$$\lambda_1 \cong \lambda_z \ ,$$

$$\lambda_2 = \lambda_\theta + \left[u_1 + (a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z}A)\tau\right]\varepsilon + \left[u_2 - \frac{A\tau}{\lambda_z}u_1 - \frac{A}{\lambda_z}(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z}A)\tau^2\right]\varepsilon^2,$$

$$\frac{1}{\lambda_\theta\lambda_z}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} = \alpha_0 + \alpha_1\left[u_1 + (a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z}A)\tau\right]\varepsilon + \ldots \qquad , \qquad \frac{1}{\lambda_\theta\lambda_z}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} = \beta_0 + \beta_1\left[u_1 + (a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z}A)\tau\right]\varepsilon$$

$$+\left\{\beta_2\left[u_1 + (a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z}A)\tau^2\right] + \beta_1\left[u_2 - \frac{A\tau}{\lambda_z}u_1 - \frac{A}{\lambda_z}(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z}A)\tau^2\right]\right\}\varepsilon^2 \tag{1.28}$$

Burada $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ ve $\beta_2$ katsayıları aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır

$$\alpha_0 = \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_z}\,, \; \alpha_1 = \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_\theta \partial \lambda_z}, \; \beta_0 = \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_\theta}, \; \beta_1 = \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_\theta^2}, \; \beta_2 = \frac{1}{2\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \lambda_\theta^3} \,. \tag{1.29}$$

(1.28) açılımını, (1.22) denkleminde yerine koyarsak çeşitli mertebeden basınç terimlerini aşağıdaki biçimde elde ederiz

$$p_0 = \beta_0, \quad p_1 = (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}) u_1 + \left[ (a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A)\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta} a \right] \tau ,$$

$$p_2 = (\frac{m}{\lambda_\theta \lambda_z} - \alpha_0) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}) u_2 + (\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2}) u_1^2 + 2\left[ (a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A)\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} a + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2} a \right] \tau u_1$$

$$+ \left[ (a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A)^2 \beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} (a^2 - \frac{\lambda_\theta^2}{\lambda_z^2} A^2) + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2} a^2 \right] \tau^2 \tag{1.30}$$

## 3. ALAN DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, (1.26) ve (1.27) ile verilen diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde edeceğiz. (1.26) denkleminin integrasyonundan aşağıdaki ifadeler elde edilir

$$u_1 = U(\xi, \tau), \; v_1 = \frac{2g}{\lambda_\theta} U(\xi, \tau) + f(\tau), \; p_1 = \frac{2g^2}{\lambda_\theta} U(\xi, \tau) + h(\tau) \,, \tag{1.31}$$

burada $U(\xi, \tau)$, yönetici denklemi daha sonra elde edilecek olan bilinmeyen bir fonksiyonu, $f(\tau)$ ve $h(\tau)$ ise $\tau$ değişkenine bağlı bilinmeyen fonksiyonlardır. Buna ek olarak, büyük $\tau$ değerleri için alan değişkenlerine sonlu çözümler bulabilmemizin mümkün olabilmesi için, (1.30) ile verilen $p_1$ eşitliğindeki $\tau$ teriminin katsayısı da sıfır olmalıdır

$$(a - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_z} A)\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta} a = 0 \,. \tag{1.32}$$

Bu bağıntı, sonlu statik şekil değiştirmeden sonraki yarıçap değişim parametresi $a$ ’yı, başlangıçtaki yarıçap değişim parametresi olan $A$ ’ya bağlı olarak ifade edebilmeyi mümkün kılar.

$$a = \frac{\lambda_\theta^2 \beta_1}{\lambda_z (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)} A \,. \tag{1.33}$$

(1.30) ve (1.31) ifadelerindeki $p_1$ yapılarını karşılaştırırsak, $U(\xi, \tau)$ fonksiyonu için sıfırdan farklı bir çözümün bulunabilmesi için aşağıdaki koşulun sağlanması gerekir

$$g^2 = (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)/2 \ . \tag{1.34}$$

Burada $g$, ortamda yayılan dalganın faz hızına karşı gelir. Bu $\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0 \rangle 0$ olduğunda geçerlidir. Bu durumda, (1.31) ile verilen çözüm aşağıdaki biçimde ifade edilebilir

$$u_1 = U(\xi,\tau), \quad v_1 = \frac{2g}{\lambda_\theta} U(\xi,\tau), \quad p_1 = \frac{2g^2}{\lambda_\theta} U(\xi,\tau) \ . \tag{1.35}$$

(1.35) ile verilen çözümü, (1.27) ve $(1.30)_2$ de kullanırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz

$$-g\frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\lambda_\theta}{2}\frac{\partial v_2}{\partial \xi} + g\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{g}{\lambda_\theta} U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{ga}{\lambda_\theta}\tau\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0,$$

$$-g\frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + \frac{2g^2}{\lambda_\theta}\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{4g^2}{\lambda_\theta^2} U \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0 ,$$

$$p_2 = (\frac{m}{\lambda_\theta \lambda_z} - \alpha_0)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + (\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta})u_2 + (\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2})U^2 + 2\left(\frac{\beta_0\beta_2}{\lambda_\theta\beta_1} - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2}\right)a\tau U$$

$$+\left(\frac{\beta_0^2}{\lambda_\theta^2\beta_1^2}\beta_2 + \frac{\beta_0^2}{\lambda_\theta^3\beta} - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2}\right)a^2\tau^2 . \tag{1.36}$$

(1.36) ile verilen denklemler arasında $v_2$'yi elimine edersek, aşağıdaki eşitliği elde ederiz

$$-\frac{2g}{\lambda_\theta}\frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{1}{g}\frac{\partial p_2}{\partial \xi} + \frac{4g}{\lambda_\theta}\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{6g}{\lambda_\theta^2} U \frac{\partial U}{\partial \xi} + (\frac{2ga}{\lambda_\theta^2})\tau\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0 \ . \tag{1.37}$$

(1.36) ile verilen $p_2$ ifadesi (1.37) de kullanılırsa aşağıdaki değişken katsayılı Korteweg-de Vries denklemi elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3 \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0 \ . \tag{1.38}$$

Burada $\mu_1, \mu_2$ ve $\mu_3$ katsayıları şu şekilde tanımlanmışlardır

$$\mu_1 = \frac{3}{2\lambda_\theta} + \frac{1}{2g^2}(\lambda_\theta\beta_2 - \beta_1 + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}),$$

$$\mu_2 = \frac{1}{4g^2}(\frac{m}{\lambda_z} - \lambda_\theta\alpha_0) \ ,$$

$$\mu_3 = \left[\frac{1}{2\lambda_\theta} + \frac{1}{2g^2}(\frac{\beta_0\beta_2}{\beta_1} - \beta_1 + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta})\right]a \ . \tag{1.39}$$

(1.39) ifadelerinden görülebileceği gibi $\mu_1, \mu_2$ ve $\mu_3$ katsayılarının değerleri, tüp malzemesinin başlangıç şekil değiştirmesine bağlıdır. Buna ek olarak, eğer yarıçap değişim parametresi olan $a$ sıfıra eşitlenirse, (1.38) denklemi, klasik KdV denklemine dönüşür. Bir başka deyişle, (1.38) denklemindeki son terim, tüpün yarıçapının değişiminin probleme etkisini ifade etmektedir.

## 4. İLERLEYEN DALGA ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, (1.38) ile ifade edilen denklemin aşağıdaki formda ilerleyen dalga çözümünü ortaya koyacağız

$$U = F(\varsigma)\ ,\ \varsigma = \lambda(\xi - \beta\tau - \frac{\mu_3}{2}\tau^2)\ . \qquad (1.40)$$

Burada $\lambda$ ve $\beta$ denklemin çözümünden belirlenecek olan iki sabittir. (1.40) ifadesi (1.38)'de kullanılırsa aşağıdaki diferansiyel denklemi elde ederiz

$$-\beta F' + \mu_1 F F' + \mu_2 F''' = 0\ . \qquad (1.41)$$

Burada üs $,\varsigma$ 'ya göre türevi ifade etmektedir.

Bu çalışmada, lokalize olmuş ilerleyen dalga çözümü ile ilgileneceğiz yani $F$ ve çeşitli mertebeden türevlerinin $\varsigma \to \mp\infty$ olurken sıfırlandığı varsayılacaktır. Bu durum göz önünde bulundurularak (1.41) denklemi $-\infty$ dan $\infty$'a kadar $\varsigma$' ya göre integre edilirse aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir

$$-F + \frac{\mu_1}{2}F^2 + \mu_2\lambda^2 F'' = 0\ . \qquad (1.42)$$

Bu tip diferansiyel denklemlerin çözümünde, Hiperbolik Tanjant metodunu kullanmak uygundur. (Malfliet ve Wieers [2]). Bu metodun uygulanmasıyla, aşağıdaki formdaki çözüm ifadesine ulaşılır

$$U = c\sec h^2\varsigma\quad ,\ \varsigma = (\frac{\mu_1 c}{12\mu_2})^{1/2}(\xi - \frac{\mu_3}{2}\tau^2 - \frac{\mu_1 c}{3}\tau)\ . \qquad (1.43)$$

Burada $c$ yalnız dalganın genliğine karşı gelmektedir. Yalnız dalganın hızının değişken olduğu ancak standart formunu korumakta olduğu görülmektedir. Dalganın yayılma hızı ise aşağıdaki gibi verilir

$$v_p = \frac{1}{\frac{\mu_1}{3}c + \mu_3\tau}\ . \qquad (1.44)$$

Bu da, genliği büyük olan dalganın, genliği daha küçük olan dalgadan daha hızlı yayılacağını gösterir. İkinci bir sonuç da, $\mu_3$ katsayısının işaretine bağlı olarak, dalga hızının orijinden uzaklaştıkça artması veya azalmasıdır. Bunu görebilmek için, tüp malzemesinin bünye denklemlerinin bilinmesi gerekir. Bu çalışmada, Demiray [3] tarafından yumuşak biyolojik dokular için önerilen bünye bağıntısı kullanılmıştır. Bu çalışmada kullanılan mekanik modelde, Simon ve çalışma arkadaşları [4] tarafından köpek aortu üzerinde yapılan deneysel çalışma sonuçları, Demiray [5] tarafından elde edilen analitik sonuç $\alpha = 1.948$ olarak bulunmuştur. $\alpha$' nın bu sayısal değeri kullanılarak, $\mu_3$ katsayısının değişimi, $\lambda_\theta$ ve $\lambda_z$'nın bir fonksiyonu olarak analiz edilebilir. Örneğin, $\lambda_\theta = \lambda_z = 1.6$ değeri için $\mu_3$'ün sayısal değeri 0.06 olarak bulunur. Bunun sonucu olarak, yarıçapı daralan tüpler için dalga hızının uzaklıkla birlikte gittikçe arttığı; yarıçapı genişleyen tüplerde ise, dalga hızının uzaklıkla birlikte gittikçe azaldığı çıkarımına varılabilir ki bu da beklenen bir sonuçtur.

## KAYNAKLAR

[1] Jeffrey, A. and Kawahara, T., "Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory", Pitman, Boston, 1981.

[2] Malfliet, M. and Wieers, E., "Theory of ion-acoustic waves revisited", J. Plasma Phys., 56**,** 441-450, 1996.

[3] Demiray, H., "Wave propagation through a viscous fluid contained in a prestressed thin elastic tube", Int. J. Engng. Sci., 30**,** 1607-1620, 1992.

[4] Simon, B.R., Kobayashi, A.S., Stradness, D.E. and Wiederhielm, C.A., "Re-evaluation of arterial constitutive laws", Circulation Research, 30, 491-500, 1972.

[5] Demiray, H., "Solitary waves in a prestressed elastic tube", Bull. Math. Biology., 58, 939-955, 1996.

[6] Atabek, H.B. and Lew, H.S. "Wave propagation through a viscous incompressible fluid contained in an initially stressed elastic tube", Biophys. J., 7, 486-503, 1966.

[7] Anliker, M., Rockwell, R.L. and Ogden, E., "Nonlinear analysis of flow pulses and shock waves in arteries", Z. Angew. Math. Phys., 22, 217-246, 1968.

[8] Demiray, H. and Antar, N., "Nonlinear waves in an inviscid fluid contained in a pre-stressed viscoelastic thin tube", Z. Angew. Math. Phys., 48, 325-340, 1997.

[9] Demiray, H., " On the elasticity of soft biological tissues", J. Biomechanics, 5**,** 309-311, 1972.

[10] Demiray, H., " Large deformation analysis of some basic problems in biophysics", Bull. Math. Biology, 38, 701-711, 1976.

[11] Fung, Y.C., "Biodynamics: Circulation", Springer Verlag, New York, 1981.

[12] Bakırtaş, İ., "İçi Akışkanla Dolu Yarıçapı Değişken Elastik Tüplerde Nonlineer Dalga Yayılımı", Doktora Tezi, 2003.